Halmazok és halmazok számossága. Halmazműveletek és logikai műveletek kapcsolata.

A halmazelmélet az egyik legfiatalabb ága a matematikának. A 19. század óta foglalkozunk vele köszönhetően Georg Kantornak.

A Halmaz, és „eleme” a halmaznak alapfogalmak. [**Halmaz, halmaz eleme**]

Halmaz elemei bármik lehetnek, számok, tárgyak, emberek, adatok akármi. Legtöbbet a matematikában használjuk. Annak is több területén előfordul:

* a függvény tanban
* a kombinatorikában
* a geometriában

Egy **halmaz megadása** történhet:

* felsorolással: A={1;2;3;4}
* tulajdonsággal: B={négyszögek}; C={pozitív egész számok 100-ig}
* képlettel: S={x | x ϵ **N**, x <1000}
* vagy egyéb módon

**Komplementer halmaz:** Egy A halmaz komplementer halmazának az alaphalmaz azon elemeinek halmazát nevezzük, amelyek az A halmaznak nem elemei. Jele: .

Egy halmazt akkor nevezünk egy másik **részhalmaz**ának, ha a halmaz összes eleme megtalálható a másikban is. Tehát ha A halmaznak részhalmaza B halmaz, akkor B halmaz minden eleme megtalálható A halmazban.

* halmaz részhalmazainak száma 2n. Ezt pedig teljes indukcióval bizonyítjuk.

**Két halmaz egyenlő**, ha minden eleme egyenlő.

A 0 elemű halmazt **üres halmaznak** nevezzük, jele: ø vagy {}

**Halmazok közti műveletek:**

**Únió**: Két halmaz uniója azon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei. Jele .

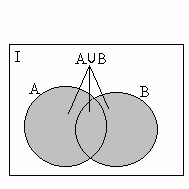
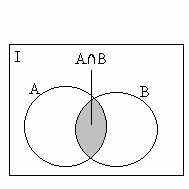
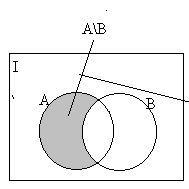
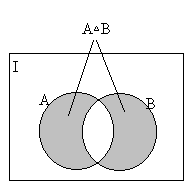
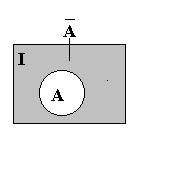
* kommutatív művelet: AB = B A
* asszociatív művelet: A(BC) = (AB) C = ABC

**Metszet**: Két halmaz metszete mindazon elemek halmaza, amelyek mindkét halmaznak elemei. Jele .

Diszjunkt halmaznak azt nevezzük, ha két halmaz metszete üres halmaz.

Disztributivitás: A(BC) = (AB)(AC) ; A(BC) = (AB)  (AC)

**Két halmaz különbsége**: Az A és B halmaz különbsége az A halmaz mindazon elemeinek halmaza, amelyek a B halmaznak nem elemei. Jele: A\B.

**Szimmetrikus differencia**: Az A és B halmaz szimmetrikus differenciája azon elemek halmaza, amelyek A és B halmaz közül pontosan az egyiknek elemei. (Tehát minden olyan elem, ami eleme vagy az A halmaznak vagy a B-nek. – kizáró vagy)

* A Δ C =(A\C) (C\A)

**Descartes-szorzat**: Két halmaz Descartes szorzata olyan rendezett elempárok halmaza, ahol az első elem az első halmazból, a második elem a második halmazból származik.

**Halmazok számossága:**

Egy véges halmaz számosságán elemeinek számát értjük. Jelölés: *H* halmaz számossága: 

Egy halmazt véges halmaznak nevezünk, ha nem létezik olyan valódi részhalmaza, amivel ugyanakkora a számossága (ekvivalens lenne). A nem véges halmazokat végtelennek nevezzük.

Két típusú végtelen lehet:

* **megszámlálhatóan végtelen**: alef zéró
* **nem megszámlálhatóan végtelen**: kontinuum számosság

**Kontinuum-sejtés**: Nem létezik olyan halmaz amelynek számossága az alef zéró és a kontinuum végtelen közé esik. Halmazelmélet ma létező legjobb axiómarendszere szerint a kontinuum sejtést sem bebizonyítani, sem megcáfolni nem lehet.

* pl számhalmazok. (**N**, **Z**, **R**, **C**)

A logikai **szita formula** kettő, illetve három halmaz esetében:





**Logikai műveletek:**

🡪Logikai függvény értelmezési tartománya bármi lehet, értékkészlete kételemű halmaz {igaz; hamis}

* Negáció(tagadás) – komplementer halmaz

|  |  |
| --- | --- |
| P | ˥P |
| igaz | hamis |
| hamis | igaz |

* Konjunkció(„és” kapcsolat) – két halmaz metszete(két állítás metszete)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P˄Q |
| igaz | igaz | igaz |
| igaz | hamis | hamis |
| hamis | igaz | hamis |
| hamis | hamis | hamis |

* Diszjunkció(vagy) – két halmaz úniója

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P˅Q |
| igaz | igaz | igaz |
| igaz | hamis | igaz |
| hamis | igaz | igaz |
| hamis | hamis | hamis |

* Implikáció, és ekvivalencia

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| P | Q | P🡪Q | Q🡪P | P🡨🡪Q |
| igaz | igaz | igaz | igaz | igaz |
| igaz | hamis | hamis | igaz | hamis |
| hamis | igaz | igaz | hamis | hamis |
| hamis | hamis | igaz | igaz | igaz |

**Alkalmazások:**

Matematikai:

* egyenlőtlenségek (törtes)
* metszetek (koordináta geometriában)
* függvények É.T., É.K.-jának megadásakor
* Descartes szorzat megjelenik a pont koordinátáinál térben

Fizikai:

* Descartes: 3.;4.;5 dimenzióbeli alkalmazása(hőmérséklet, idő)
* Logikai áramkörök és/vagy kapcsolások
  + számítógép működésének alapja
* nyelvészetben
* kódfejtés!!!
* jógi érverlésnél: és/vagy (ahol matematikai, vagy hétköznapi „vagy”)

**de Morgan féle azonosságok:**

A halmazelméletben a következők:

\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}

\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}

Logikában pedig:

\begin{matrix}
\neg {(a \wedge b)} = \neg{a} \vee \neg{b} \\
\neg {(a \vee b)} = \neg{a} \wedge \neg{b}
\end{matrix}